

Wzory Vieta'a i równania kwadratowe [Operon - zbiór zadań]

Zadanie 3.14. Wyznacz takie wartości m , dla których pierwiastki x_1, x_2 równania $2x^2 - (2m + 1)x + m = 0$ spełniają warunek $x_1 + 2x_2 = 4$.

Zadanie 3.15. Wyznacz takie wartości m , dla których pierwiastki x_1, x_2 równania $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m - 6 = 0$ spełniają warunek $x_1 + 2x_2 = 19$.

Zadanie 3.16. Wyznacz takie wartości m , dla których pierwiastki x_1, x_2 równania $x^2 - (m - 4)x + 2m = 0$ są liczbami dodatnimi i spełniają warunek $x_1 = 2x_2$.

Zadanie 3.17. Wyznacz takie wartości m , dla których różnica kwadratów pierwiastków równania $2x^2 - 7x + m = 0$ jest równa $\frac{7}{4}$.

Zadanie 3.18. Wyznacz takie wartości a , dla których pierwiastki x_1, x_2 równania $2x^2 + (2a - 1)x + a - 1 = 0$ spełniają warunek $3x_1 - 4x_2 = 11$.

Zadanie 3.19. Wyznacz takie wartości m , dla których pierwiastki x_1, x_2 równania spełniają podany obok warunek:

- (a) $(m + 1)x^2 + 2mx + 5 = 0$, $x_1 - x_2 = 2$
- (b) $(m - 2)x^2 + (3m - 5)x + 3 = 0$, $x_1 = x_2$
- (c) $(m + 3)x^2 + mx + (m + 1) = 0$, $x_1 = 3x_2$
- (d) $3x^2 + (m - 3)x + m + 5 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = \frac{8}{3}$
- (e) $(m + 5)x^2 - (m + 7)x - m + 3 = 0$, $x_1x_2 = x_1 + x_2$
- (f) $mx^2 - (m - 1)x - m + 1 = 0$, $x_1^3 + x_2^3 = 4$
- (g) $mx^2 + (m^2 - 2)x + 2(m + 1) = 0$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2$
- (h) $(m + 2)x^2 + (m - 3)x + m = 0$, $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = \frac{3}{2}$
- (i) $x^2 + mx + 2m + 8 = 0$, $x_1 = 2x_2$
- (j) $x^2 + 2(3m + 2)x + 3(2m + 1) = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = \frac{10m}{3}x_1x_2$
- (k) $x^2 - (m + 1)x + m = 0$, $|x_1 - x_2| = 1$.

Zadanie 3.20 Udowodnij, że jeżeli liczby a i c są różne od zera, to pierwiastki równania $cx^2 + bx + a = 0$ są odwrotnościami pierwiastków równania $ax^2 + bx + c = 0$.

Wzory Vieta'a i równania kwadratowe [Operon - podręcznik]

Zadanie 8. Udowodnij że jeżeli stosunek pierwiastków x_1 i x_2 trójmianu $ax^2 + bx + c$ wynosi $\frac{k}{k+1}$, to jego współczynniki a, b, c spełniają warunek $\frac{ac}{b^2} = \frac{k(k+1)}{(2k+1)^2}$.

Zadanie 9. Wykaż, że jeżeli pierwiastki trójmianu $x^2 + ax + (b + 1)$ są liczbami naturalnymi, to suma $a^2 + b^2$ jest liczbą złożoną.

Zadanie 10. Udowodnij, że jeżeli pierwiastki x_1 i x_2 trójmianu $x^2 - ax + a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, są liczbami rzeczywistymi, to $x_1^2 + x_2^2 \geq 2(x_1 + x_2)$.

Zadanie 11. Dane są trójmiany $x^2 + px + q$ oraz $qx^2 + mpx + 1$, których współczynniki m, p, q są liczbami rzeczywistymi, przy czym $q > 0$. Udowodnij, że jeżeli pierwiastkami tych trójmianów są odpowiednio liczby x_1, x_2 i $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$, to $mp \geq 4$.

Zadanie 12. Dane są trójmiany $x^2 + px + 1$ oraz $x^2 + qx + 1$, których pierwiastkami są odpowiednio liczby x_1, x_2 oraz x_3, x_4 . Udowodnij, że $(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4) = q^2 - p^2$.

Zadanie 13. Udowodnij, że jeżeli liczby rzeczywiste x_1 i x_2 są pierwiastkami trójmianu $x^2 + px - \frac{1}{2p^2}$, gdzie $p \in \mathbb{R}$ i $p \neq 0$, to $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$.

Wzory Vieta'a - wielomiany [Operon - zbiór zadań]

Zadanie 7.1 Liczby 1 i -2 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + 6$. Znajdź trzeci pierwiastek oraz współczynniki a i b tego wielomianu.

Zadanie 7.2 Liczby 2 i 3 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + mx^2 + 11x + n$. Znajdź trzeci pierwiastek oraz współczynniki m i n tego wielomianu.

Zadanie 7.3 Dla jakich wartości m i n wielomian $P(x) = x^3 + mx + n$ ma takie trzy pierwiastki x_1, x_2, x_3 , że $x_2 = x_1 - 2$ i $x_3 = x_1 - 4$? Znajdź te pierwiastki.

Zadanie 7.4 Dla jakich wartości a i b wielomian $P(x) = x^3 - 14x^2 + ax + b$ ma takie trzy pierwiastki x_1, x_2, x_3 , że $x_2 = 2x_1$ i $x_3 = 4x_1$? Znajdź te pierwiastki.

Zadanie 7.5 Dla jakich wartości m i n wielomian $P(x) = x^3 + mx + n$ ma takie trzy pierwiastki x_1, x_2, x_3 , że $x_1 = x_2$ i $x_3 = x_1 - 3$? Znajdź te pierwiastki.

Zadanie 7.6 Dla jakich wartości m i n wielomian $W(x) = x^3 + mx + n$ ma takie trzy pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, x_3 , że $x_1 = x_2 = x_3 - 3$? Znajdź te pierwiastki.

Zadanie 7.7 Pierwiastkami wielomianu $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ są liczby x_1, x_2, x_3 . Nie wyznaczając ich, napisz wielomian, którego pierwiastkami są liczby:

(a) $x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1$;

(b) x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1 ;

(c) $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$;

(d) $\frac{1}{x_1x_2}, \frac{1}{x_2x_3}, \frac{1}{x_3x_1}$.

Zadanie 7.8 Pierwiastki wielomianu $W(x) = x^3 - 12x^2 + mx - 60$ są długościami boków pewnego trójkąta prostokątnego. Znajdź m oraz te pierwiastki.

Zadanie 7.9 Wyznacz takie wartości m , aby suma pierwiastków rzeczywistych równania $x^2 + (m^3 + 10)x + m^2 - 6 = 0$ była równa ich iloczynowi.

Zadanie 7.10 Wyznacz takie wartości a , aby sześćian sumy i iloczyn pierwiastków rzeczywistych równania $x^2 + (a - 5)x + (a - 11) = 0$ były liczbami przeciwnymi.

Zadanie 7.11 Wyznacz takie wartości m , aby suma kwadratów pierwiastków rzeczywistych równania $x^2 - mx + 6m = 0$ była o 32 większa od sumy ich sześćcianów.

Zadanie 7.12 Na wykresie funkcji $y = x^2 - 3x + 2$ obrano takie dwa punkty A i B , że rzędna punktu A równa jest odciętej punktu B , a sześćian rzędnej punktu A jest o 196 większy od rzędnej punktu B . Znajdź odciętą punktu A . Ile rozwiązań ma to zadanie?

Zadanie 7.13 Wyznacz takie wartości m , dla których równanie $(m - 2)x^4 - 2(m + 3)x^2 + (m - 1) = 0$ ma cztery pierwiastki rzeczywiste.

Zadanie 7.14 Wyznacz takie wartości m , dla których równanie $x^3 - (m + 1)x^2 + (m - 3)x + 3 = 0$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste, z których jeden jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych.

Zadanie 7.15 Wyznacz takie wartości m , dla których pierwiastki równania $3x^3 - 3mx^2 + 3x - 2 = 0$ spełniają równość $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$.

Zadanie 7.16 Wyznacz takie wartości a , b i c , dla których pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 - ax^2 + bx - c$ są liczby a , b , c .

Wzory Vieta'a - wielomiany [Operon - podręcznik]

Zadanie 4. Udowodnij, że jeśli wielomian $x^3 + ax^2 + bx + c$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste, to $a^2 \geq 3b$.

Zadanie 5. Wiedząc, że 2 i 3 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = 2x^3 + mx^2 - 13x + n$, wyznacz trzeci pierwiastek tego wielomianu oraz współczynniki m i n .

Zadanie 6. Udowodnij, że jeśli dwa pierwiastki wielomianu $ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a \neq 0$, są liczbami przeciwnymi, to $bc = ad$.

Zadanie 7. Liczby x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami wielomianu $ax^3 - ax^2 + bx + b$, gdzie a i b są liczbami różnymi od zera. Wyznacz wartość wyrażenia $(x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right)$.

Zadanie 8. Dla jakich a i b liczba -1 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $x^4 + bx^3 + 2x^2 + ax + 1$?

Zadanie 9. Dla jakich a i b liczba 1 jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu $x^4 - 5x^3 + 9x^2 + ax + b$?

Zadanie 10. Wyznacz współczynniki a, b, c wielomianu $x^5 - 10x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 32$, wiedząc, że wszystkie jego pierwiastki są liczbami dodatnimi.

Wzory Viete'a - równania i nierówności wymierne [Operon - zbiór zadań]

Zadanie 4.13 Wyznacz te wartości m , dla których pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 równania $(m+2)x^2 - 2x - (m-2) = 0$ spełniają nierówność $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 2$.

Zadanie 4.14 Dla jakich wartości m pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 równania $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - m - 4 = 0$ spełniają warunek $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = m - 1$?

Zadanie 4.15 Dla jakich wartości m pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 równania $\frac{mx}{m-1} + \frac{m+1}{x} = x + 1$ spełniają nierówność $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 2m + 1$?

Zadanie 4.16 Wyznacz te wartości m , dla których pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 równania $\frac{x}{m} + \frac{m}{x} = \frac{1}{mx} + 2$ spełniają nierówność $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 4$?

Zadanie 4.17 Wyznacz liczbę pierwiastków rzeczywistych równania $\frac{x^2+1}{m^2x-2m} + \frac{1}{mx-2} = \frac{x}{m}$ w zależności od m .

Zadanie 4.18 Dla jakich wartości m pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 równania $\frac{x+1}{2x-1} - \frac{2x+1}{x-1} = m$ spełniają nierówność:

(a) $x_1 + x_2 < m$;

(b) $x_1 \cdot x_2 > 0$?

Zadanie 4.19 Wykaż, że jeżeli liczby rzeczywiste a i b spełniają warunek $0 < a < b$, to dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi nierówność $\frac{x+a}{x+b} > \frac{a}{b}$.

Zadanie 4.20 Dla jakich wartości m funkcja $f(x) = \frac{m^2+m-6}{m^2-1}x^2 + (m+1)x + \frac{1-m^2}{m+3}$ przyjmuje tylko wartości dodatnie?