

100 zadań na 100-lecie odzyskania przez Polskę niepodległości

Zadania konkursowe - etap VI - 8 stycznia 2019

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich (a, b) takie, że $a^2 + b^2$ jest liczbą pierwszą i $2ab$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f(x)f(y) = f(x - y)$.

Zadanie 3. Znaleźć największą możliwą wartość liczby $(x^3 + 1)(y^3 + 1)$, jeśli x, y są liczbami rzeczywistymi takimi, że $x + y = 1$.

Zadanie 4. Liczbę 1918 przedstawić w postaci sumy liczb naturalnych, żeby iloczyn był największy z możliwych.

Zadanie 5. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p , dla których każda z liczb $p^2 + 2$, $p^3 + 2$, $p^4 + 2$ jest liczbą pierwszą.

Zadanie 6. Znajdź najmniejszą liczbę naturalną n taką, że liczby $n + 3$ i $n - 100$ były kwadratami liczb naturalnych.

Zadanie 7. Funkcja liniowa f określona dla wszystkich liczb rzeczywistych spełnia warunek $f(2010) + f(1) = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $f(0) + f(1) + \dots + f(2010) + f(2011)$.

Zadanie 8. Dwusieczne kątów wewnętrznych przy wierzchołkach B i C trójkąta ABC przecinają boki AC i BC w punktach B_1 i C_1 . Środek okręgu opisanego na trójkącie C_1CB_1 leży na prostej AB . Wyznaczyć miarę kąta ABC .

Zadanie 9. Wyznaczyć sumę $\frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{2011 \cdot 2012 \cdot 2013}$.

Zadanie 10. Rozwiąż równanie $[x] \cdot \{x\} = x$.

Rozwiązania należy wysłać do 12 stycznia do godziny 24:00 na adres konkurs@awera.pl

Powodzenia ;)

