

100 zadań na 100-lecie odzyskania przez Polskę niepodległości

Zadania konkursowe - etap VII - 15 stycznia 2019

Zadanie 1. Rozważamy sześcienną kostkę, która na każdej ze swoich ścian ma napisaną dodatnią liczbę całkowitą. Wiadomo, że na trzech ściankach mających wspólny wierzchołek znajdują się liczby: 6, 9, 12. Dodatkowo spełniony jest warunek, że iloczyn liczb na przeciwległych ściankach jest stały (tzn. taki sam każdej pary ścianek). Wyznacz najmniejszą możliwą sumę wszystkich liczb napisanych na kostce.

Zadanie 2. Znajdź wszystkie liczby pierwsze postaci $2^{2^n+2} + 1$ dla n całkowitych dodatnich.

Zadanie 3. Wykaż, że liczba $3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2018} + 3^{2019}$ jest podzielna przez 13.

Zadanie 4. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x + y + z &= 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \\ x^5 + y^5 + z^5 &= 3 \end{cases}$$

Zadanie 5. Dany jest trójkąt ABC o polu P . Na bokach AB i BC obrano, odpowiednio, punkty K i L tak, że $|AK| : |BK| = 2 : 5$ oraz $|CL| : |BL| = 3 : 4$. Odcinki AL i CK przecinają się w punkcie M . Oblicz pole trójkąta ACM .

Zadanie 6. Rozwiąż nierówność $(x - 2)^{x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 6x + 8} > 1$.

Zadanie 7. Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym stosunek długości boków wynosi $3 : 1$. Dłuższy bok AB podzielono na trzy równe części punktami E i F tak, że $|AE| = |EF| = |FB| = \frac{1}{3}|AB|$. Oblicz sumę $|\angle DEA| + |\angle DFA| + |\angle DBA|$.

Zadanie 8. Zapisz liczbę 2019 w postaci sumy kolejnych liczb naturalnych. Znajdź wszystkie rozwiązania.

Zadanie 9. Znajdź wszystkie $x \in (0, 2\pi)$ spełniające warunek $2\cos x \leq |\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}| \leq \sqrt{2}$.

Zadanie 10. W sześcian o krawędzi a wpisana jest kula styczna jednocześnie do wszystkich jego krawędzi. Z sześcianu wystają fragmenty tej kuli. Oblicz pole powierzchni i objętość tej bryły.

Rozwiązania należy wysłać do 19 stycznia do godziny 24:00 na adres konkurs@awera.pl
Powodzenia ;)

