

## 100 zadań na 100-lecie odzyskania przez Polskę niepodległości

### Zadania konkursowe - etap IV - 11 grudnia 2018

**Zadanie 1.** Dane są liczby  $2^{2009}$  i  $5^{2009}$  w zapisie dziesiętnym. Liczby te zapisa-  
no jedna za drugą tworząc w ten sposób pewną liczbę naturalną. Ile cyfr ma ta  
liczba?

**Zadanie 2.** Wyznaczyć wszystkie pary  $(x, y)$  liczb naturalnych, dla których  
 $x|y + 1$  i  $y|x + 1$ .

**Zadanie 3.** Dla jakich wymiernych wartości parametru  $a$  funkcja  
 $f(x) = ax^2 + (a + 1)x + a - 1$  ma tylko całkowite miejsca zerowe?

**Zadanie 4.** Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie  $1! + 2! + \dots + x! = y!$

**Zadanie 5.** Na trójkącie równobocznym o boku długości 1 opisano okrąg. Niech  
 $M$  będzie dowolnym punktem tego okręgu. Oblicz  $|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2$ .

**Zadanie 6.** W trapezie  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) punkt  $O$  jest punktem przecięcia prze-  
kątnych. Wiedząc, że pola trójkątów  $AOB$  i  $DOC$  są odpowiednio równe  $p^2$  i  $q^2$ ,  
oblicz pole trapezu.

**Zadanie 7.** Oblicz bez użycia tablic:  $\sin \frac{\pi}{14} \cdot \sin \frac{3\pi}{14} \cdot \sin \frac{5\pi}{14}$ .

**Zadanie 8.** Oblicz  $\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b}$ , jeśli wiadomo, że  $\frac{a-c}{b+c} + \frac{b-a}{c+a} + \frac{c-b}{a+b} = 1$ .

**Zadanie 9.** Wyznacz sumę:  $1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots 1}_{1918 \text{ cyfr}}$ .

**Zadanie 10.** 34 uczniów klasy IC umieszczamy losowo w 34 pokojach. Jaka jest  
szansa, że dokładnie jeden pokój jest pusty?

Rozwiązania należy wysłać do 15 grudnia do godziny 24:00 na adres  
konkurs@awera.pl

*Powodzenia ;)*

